# Berechnungsmethoden der Kreiszahl Pi und deren Genauigkeit im Laufe der Geschichte vom Altertum bis heute

**Vorwissenschaftliche Arbeit**

verfasst von

Hannes Pantscharowitsch
Klasse 8B

ausgeführt unter der Betreuung von

Mag. Martina Wolny

am

BG XIII, Fichtnergasse 15, 1130 Wien

Wien, am 28. Februar 2021

# Abstract

In der vorliegenden Arbeit werden die Berechnungsmethoden der Kreiszahl Pi und deren Genauigkeit im Laufe der Geschichte vom Altertum bis heute vorgestellt und verglichen. Es soll sichtbar gemacht werden, wie sich die Berechnungsmethoden änderten und welche Auswirkungen diese auf den Umgang mit dieser magischen Zahl hatten.

Ein Blick in ein Lexikon soll in **Kapitel 1** deutlich machen, was man heutzutage unter Pi versteht. Neben dem Verhältnis von Kreisumfang zu Kreisdurchmesser ist $\pi$, der sechzehnte Buchstabe des griechischen Alphabets, in der Physik das Symbol für das Pion und in der Mathematik ist der Großbuchstabe $\Pi$ das Zeichen für das Produkt mehrerer Faktoren.

Die über 4000 Jahre alte Geschichte der Kreiszahl, welche in Ägypten und Babylonien begann und erstaunlich genaue Ergebnisse brachte, die sich in der Bibel wiederfinden lässt und schließlich im antiken Griechenland mit grafischen Überlegungen die ersten Durchbrüche erlebte, wird in **Kapitel 2** gezeigt.

In **Kapitel 3** wird die parallel stattfindende Berechnung von $\pi$ im Osten, sprich in China, Indien und Arabien, beschrieben, welche durch die unglaubliche Arbeitsmoral der dortigen Gelehrten genaueste Ergebnisse durch eingeschriebene Polygone, aber auch mittels erster Reihen erhielt.

Mit der in **Kapitel 4** erhaltenen Erkenntnis, dass die Kreiszahl vermutlich unendlich und transzendent ist, begann im 16. Jahrhundert eine ganz neue Ära, welche sich mit Winkelfunktionen, unendlichen Summen, Produkten, Reihenentwicklungen und Kettenbrüchen beschäftigte und schließlich beweisen konnte, dass $\pi$ tatsächlich transzendent ist.

Die weitere Entwicklung für moderne Berechnungen mit Hilfe von Computern wird in **Kapitel 5** untersucht. Hier fällt – dank Rechenmaschinen, neuer Computer, aber insbesondere neuer Reihenentwicklungen und Formeln – ein Rekord nach dem anderen, bis schließlich die ersten Milliarden berechneten Nachkommastellen überschritten waren.

Verglichen werden die Abweichungen und Fehler der vielen, über lange Zeit entstandenen Formeln in **Kapitel 6**, wo mit Hilfe einer Tabelle und mehrerer Grafiken veranschaulicht wird, wie sich diese im Laufe der Zeit geändert und verbessert haben. Hier wird auch noch einmal deutlich, welche Ausmaße die Berechnung in dieser Zeit angenommen hat.

In **Kapitel 7**, dem letzten dieser Arbeit, wird die Sinnhaftigkeit und Bedeutung weiterer Berechnung erläutert, als auch ein kurzer Ausblick darauf, was kommen mag, gegeben.

# Vorwort

Die Idee zu dem Thema dieser vorwissenschaftlichen Arbeit kam mir in einer äußerst interessanten Mathematikstunde. Immer wieder wird mit $\pi$ gerechnet, doch was ist $\pi$ überhaupt? Ist es eine Variable, eine physikalische Größe, oder doch nur eine Zahl? Warum kann ich einfach so auf meinem Taschenrechner die Taste „$\pi$“ drücken, ohne zu wissen, was dahintersteckt? Was hat $\pi$ mit den Winkelfunktionen Sinus, Cosinus und Tangens zu tun? Warum brauche ich dieses Unbekannte, um Oberflächen, Volumina usw. von Drehkörpern auszurechnen? Warum zeigt mir der Online-Taschenrechner immer mehr und mehr Nachkommastellen an, wenn ich $\pi$ dort eingebe? Diese Fragen tauchten hier und da auf, mich haben sie jedoch nicht mehr losgelassen.

Ich fand die ersten Antworten auf meine Fragen: Das Unbekannte scheint eine Zahl zu sein, doch was ist diese Zahl überhaupt und vor allem, wie ist sie entstanden? Ich begann weiter zu forschen und bekam immer mehr Antworten auf meine Fragen, doch auf jede Antwort folgte eine neue Frage. Somit entstand das perfekte Thema für ein Portfolio der 10. Schulstufe. Für mich war das Thema $\pi$ mit der Abgabe dieser Arbeit jedoch noch nicht erledigt und somit war der Grundstein für meine vorwissenschaftliche Arbeit gelegt.

Diese Idee in die Wirklichkeit umsetzen konnte ich jedoch nur mit großer Unterstützung meiner sehr engagierten Mathematikprofessorin Frau Mag. Martina Wolny. Daher möchte ich ihr an dieser Stelle herzlich danken, mich bei diesem Projekt unterstützt zu haben. Auch möchte ich mich bei meinen Eltern bedanken, die mir bei der Beschaffung von Unterlagen sehr halfen und mir bei technischen Schwierigkeiten immer zur Seite standen.

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Einleitung

In dieser Arbeit geht es um die Geschichte der unglaublichen Zahl $\pi$ und wie sich deren Bestimmung immer weiter entwickelt hat. Die Zeitspanne vom antiken Ägypten bis ins 21. Jahrhundert wird in dieser Arbeit gemäß des Wissensstandes eines Schülers der 12. Schulstufe beschrieben.

Ein Blick ins Lexikon zeigt, wie $\pi$ definiert ist:[1]

> Pi, das:
>
> 1. $\Pi$, $\pi$, der 16. Buchstabe des griechischen Alphabets.
> 2. *Mathematik*: 1) $\Pi$, Zeichen für das Produkt mehrerer Faktoren; 2) $\pi$, Zeichen für die ludolphsche Zahl (Kreiszahl) $\pi = 3{,}141\,592\,653\,589\,793\ldots$, eine transzendente reelle Zahl, die das konstante Verhältnis von Kreisumfang ($2\pi r$) zum Durchmesser ($2r$) angibt. Die Kreisfläche $A$ berechnet sich aus $A = \pi r^2$. [...]
> 3. *Physik*: $\pi$, Symbol für das Pion ($\rightarrow$ Mesonen).

Doch warum wurde überhaupt der Buchstabe $\pi$ für die Kreiszahl gewählt? Die Wahl fiel auf „p“ bzw. $\pi$ bezugnehmend auf den ersten Buchstaben des griechischen Wortes „Perimeter“ (dt. Umfang)[2] und wurde im 18. Jahrhundert eingeführt.[3]

Noch lange bevor diese unbekannte Zahl diesen Namen bekam, beschäftigte sie Wissenschafter rund um die Welt. Die ältesten, noch vorhandenen Aufzeichnungen stammen aus Babylonien und sind etwa 4 000 Jahre alt und bis heute ist die Forschung zur Berechnung von $\pi$ nicht abgeschlossen.

---

1 Der Brockhaus. - Leipzig: F. A. Brockhaus GmbH. 2005, S.4819.

2 vgl. Stewart, Ian: Unglaubliche Zahlen. - 2. Auflage. Reinbeck bei Hamburg: Rowohlt Taschenbuch Verlag, 2018, S.231.

3 vgl. Schmidt, Karl Helmut: $\pi$. Geschichte und Algorithmen einer Zahl. - Books on Demand GmbH, 2001, S.16.

# 2 Altertum

## 2.1 Ägypten

Es ist etwa 4 000 Jahre her, als die Geschichte von $\pi$ begann und erste Ergebnisse schriftlich festgehalten wurden. Eine der frühesten Aufzeichnungen stammt von einem ägyptischen Schreiber namens Ahmes.[4, 5, 6, 7, 8] Sein berühmter Papyrus „Rhind“ enthält 84 Probleme und deren Lösungen. Das Problem $\pi$ hatte die Nummer 50. Um 1850 v. Chr. schrieb er: „Nimm $\frac{1}{9}$ vom Durchmesser weg und konstruiere ein Quadrat aus dem Rest; das hat die gleiche Fläche wie der Kreis.“

Mit Ahmes' Rechnung ergibt die Näherung[9]

$$\frac{64}{81} \cdot d^2 = \frac{\pi}{4} \cdot d^2$$

und damit erhält man

$$\pi = \frac{256}{81} \approx 3,1605. \tag{1}$$

Vergleicht man Ahmes' Ergebnis mit der uns heute bekannten Kreiszahl und berechnet den Fehler

$$\frac{\text{„ist-Wert“} - \text{„soll-Wert“}}{\text{„soll-Wert“}} \cdot 100 = \text{ Fehler in \%}, \tag{2}$$

so stellt man fest, dass der Ägypter die tatsächliche Zahl um weniger als ein Prozent verfehlte:

$$\frac{3,1605 - \pi}{\pi} \cdot 100 \approx 0,602\%.$$

Somit war die Berechnung des ägyptischen Schreibers für viele Jahre die mit Abstand genaueste. Eine herausragende Leistung, wenn man bedenkt, dass die ägyptische Zahlendarstellung, welche schon über ein Dezimalsystem verfügte, die Arbeit Ahmes' nicht leichter machte. Das Zahlensystem beinhaltete keine Ziffer für die Zahl Null, wodurch das Notieren der Berechnungen sehr schnell äußerst kompliziert wurde.[10] Jedoch setzte sich dieser Wert nicht durch, sodass man sich tausend Jahre später immer noch mit dem Wert 3 zufrieden gab.[11]

4 vgl. Alten, Heinz-Wilhelm/Djafari Naini, Alireza/et al.: 4000 Jahre Algebra. - 2. Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2014, S.10f.
5 vgl. Blatner, David: $\pi$. Magie einer Zahl. - Reinbeck bei Hamburg: Rowohlt Verlag GmbH, 2000, S.8.
6 vgl. Hein, Wolfgang: Die Mathematik im Altertum. Von Algebra bis Zinseszins. - Darmstadt: WBG Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 2012, S.86.
7 vgl. Scholz, Werner: Die Geschichte der Approximationen der Zahl $\pi$. Fachbereichsarbeit am GRG XIII Wenzgasse. 3. Version, 2001, S.4.
8 vgl. Stewart, 2018, S.206.
9 vgl. Hein, 2012, S.86.
10 vgl. Schmidt, 2001, S.14.
11 vgl. Blatner, 2000, S.8.

Ein fast unvorstellbarer Fakt ist, dass die Große Pyramide in Gise in einem faszinierenden Zusammenhang mit $\pi$ steht.[12, 13] Das Verhältnis von Grundkante zu Höhe entspricht $\frac{\pi}{2}$. Dies ist insofern unglaublich, da – soweit wir wissen – diese Näherung wesentlich genauer ist als der Wert, der den Ägyptern bekannt war. Es lässt sich zeigen, dass dieses Bauwerk damit automatisch eine Annäherung an $\pi$ darstellt.

## 2.2 Babylonien

Die genaueren Berechnungen der Ägypter wurden in Babylonien jedoch bis 2000 v. Chr. nicht akzeptiert und viele gaben sich mit $\pi = 3$ zufrieden, obwohl das Rechenniveau in diesem Land deutlich über dem der Ägypter lag.[14] Im Gegensatz zu den Ägyptern verwendete man in Babylonien das babylonische Sexagesimalsystem, welches auf der Zahl 60 basiert. Es ist die vermutlich älteste Zahlendarstellung überhaupt, welche schlussendlich jedoch vom Dezimalsystem verdrängt wurde.[15, 16]

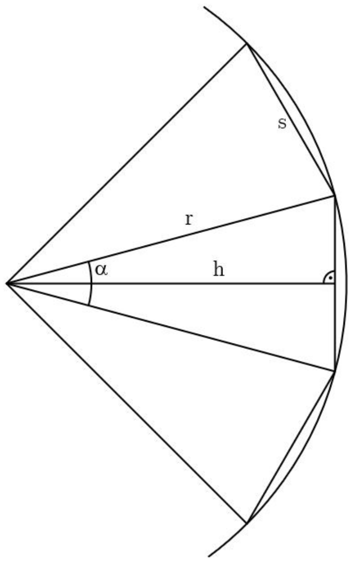


Abbildung 1: Detail des eingeschriebenen 12-Ecks.

Der Wert für $\pi = 3$ wurde wahrscheinlich ermittelt, indem man ein 12-Eck in einen Einheitkreis ($r = 1$) einschrieb, vgl. Abb. 1:[17]

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{h}{1} = h$$

und

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\frac{s}{2}}{1} = \frac{s}{2}.$$

12 vgl. Blatner, 2000, S.11.
13 vgl. Schmidt, 2001, S.112.
14 vgl. Schmidt, 2001, S.16.
15 vgl. Brockhaus, 2005, S.5747.
16 vgl. Schmidt, 2001, S.14.
17 vgl. Scholz, 2001, S.5.

Da im 12-Eck $\alpha = \frac{360°}{12} = 30°$ ist, errechnet sich der Flächeninhalt des 12-Ecks $A_{12}$ wie folgt:

$$A_{12} = 12 \cdot \frac{s}{2} \cdot h = 12 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

und mit

$$\sin(\alpha) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

erhält man

$$A_{12} = 6 \cdot \sin(\alpha) = 6 \cdot \sin(30°) = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3. \tag{3}$$

Das bedeutet eine Annäherung von $\pi$ durch den Wert 3.

Vergleicht man diesen Wert mit dem heutigen, stellt man folgenden, relativ großen Fehler fest:

$$\frac{3-\pi}{\pi} \cdot 100 \approx 4,507\%.$$

Später nutzte man in Mesopotamien und Babylonien allgemein

$$\pi = \frac{25}{8} = 3,125. \tag{4}$$

Dieser Wert weist schon einen deutlich geringeren Fehler auf und verfehlte den tatsächlichen Wert um nur etwas mehr als $0,5\%$:

$$\frac{(3,125-\pi)}{\pi} \cdot 100 \approx 0,528\%.$$

## 2.3 $\pi$ in der Bibel

Auch in der Bibel findet sich ein Wert für $\pi$. Im ersten Buch der Könige (1. Könige 7,23)[18] findet man eine Aussage, welche sich auf den Bau des Tempels von Salomo bezieht:[19, 20, 21]

> Und er machte ein Meer (=Wasserbecken), gegossen, zehn Ellen weit, von einem Rande zum anderen, rund umher, und fünf Ellen hoch, und eine Schnur dreißig Ellen lang war das Maß rings um.[22]

Daher wurde also angenommen, dass $\pi = 3$ ist.

18 vgl. Die Bibel. - Klosterneuburg: Verlag Österreichisches Katholisches Bibelwerk, 1986., S.345.
19 vgl. Schmidt, 2001, S.17.
20 vgl. Hein, 2012, S.86.
21 vgl. Scholz, 2001, S.5.
22 Blatner, 2000, S.12f.

Entstanden ist diese Bibelstelle wahrscheinlich im 6. Jh. v. Chr., als es schon wesentlich genauere Werte für $\pi$ gab. Seither haben sich Mathematiker und Bibelgelehrte damit beschäftigt und Erklärungen für diese ungenaue Angabe gesucht. Einige Ansätze wurden gefunden:

> Rabbi Mose Ben Maimon (1135–1204)[...] schrieb: Das Verhältnis des Durchmessers eines Kreises zu seinem Umfang läßt sich nicht exakt bestimmen ... aber man kann es näherungsweise berechnen ... und die Näherung, die Gelehrte verwenden, ist das Verhältnis von eins zu dreieinsiebteln ... Da es unmöglich ist, das Verhältnis mit vollkommender Genauigkeit zu bezeichnen ... einigten sie sich auf eine runde Zahl und sagten: ‚Jeder [Kreis], der einen Umfang von drei Händen besitzt, hat einen Durchmesser von einer Hand.' Das genügte ihnen für alle Messungen, die erforderlich waren.
>
> Der im Bibeltext genannte Wert für $\pi$ bildet eine völlig ausreichende Näherung für die rituellen Praktiken von Laien. Doch der wahre Wert von $\pi$ ist aus den zahlenmystischen Entsprechungen der hebräischen Buchstaben abzuleiten. Das Wort Umfang wird geschrieben mit den Buchstaben kof, waw, he, aber nur kof, waw gelesen. Betrachtet man nun die zahlenmystischen Entsprechungen dieser beiden Buchstabenfolgen – wobei jeder Buchstabe einer Zahl und der „Wert" eines Wortes der Summe seiner Buchstaben entspricht –, dann erhält man 111 und 106. Wenn man diese beiden Zahlen durch einander teilt und sie mit dem „Laienwert" von 3 multipliziert, dann erhält man 3,14150943, was in der Tat verblüffend ist...
>
> Der Rand um dieses enorme Wasserreservoir war „eine Hand breit"[...]. Der Durchmesser schloß die Breite des Randes ein, während der Umfang innerhalb des Randes gemessen wurde. (Voraussetzung: Die „Handbreite" mißt ungefähr eine viertel Elle.)[23]

Man erhält dadurch für den Innendurchmesser folgenden Wert in Ellen

$$d_i = 10 - 2 \cdot \frac{1}{4} = 9,5$$

und für die Näherung von $\pi$:

$$\pi = \frac{u}{d_i} = \frac{30}{9,5} \approx 3,1579,$$

der Fehler beträgt damit nur 0,52%.

23 Blatner, 2000, S.13.

## 2.4 Griechenland

Dass die Quadratur des Kreises und somit die genaue Bestimmung von $\pi$ möglich sein müsse, war die Meinung von Antiphon (480–411 v. Chr.).[24, 25, 26] Seine Idee war es, einem Kreis Vielecke mit immer größerer Seitenzahl einzuschreiben, bis der Unterschied zwischen Vieleck und Kreis nicht mehr erkennbar ist. Der Kreis ist dann also, laut seiner Theorie, völlig erschöpft und $\pi$ lässt sich relativ einfach berechnen. Diese Vorgehensweise wird auch „Exhaustions-Methode“ genannt. Mit seinem Gedanken legte er den Grundstein für nachfolgende Berechnungen und die Arbeit späterer Mathematiker, unter anderem für die von Archimedes.

Archimedes (287–212 v. Chr.) bewies, dass sich der Umfang eines Kreises zu seinem Durchmesser genauso verhält wie die Fläche eines Kreises zum Quadrat seines Radius'.[27] In beiden Fällen ergibt das Verhältnis also die Zahl $\pi$. Die Griechen waren sich zwar sicher, dass die Wurzel aus 2 irrational ist, wussten aber nicht, ob $\pi$ nicht doch endlich ist. Archimedes entwickelte einen Algorithmus zur Berechnung von $\pi$. Um den Kreisumfang zu berechnen, begann Archimedes mit einem Sechseck und verdoppelte die Seitenanzahl, bis er ein Vieleck mit 96 Seiten hatte.[28, 29] Diese Methode konnte er unter Verwendung des Satzes von Pythagoras und des Halbwinkelsatzes, jedoch ohne der heute zur Verfügung stehenden Sinus- und Tangens-Funktionen, entwickeln. Dadurch entstanden folgende Formeln und die daraus berechnete Zahl $\pi$.[30]

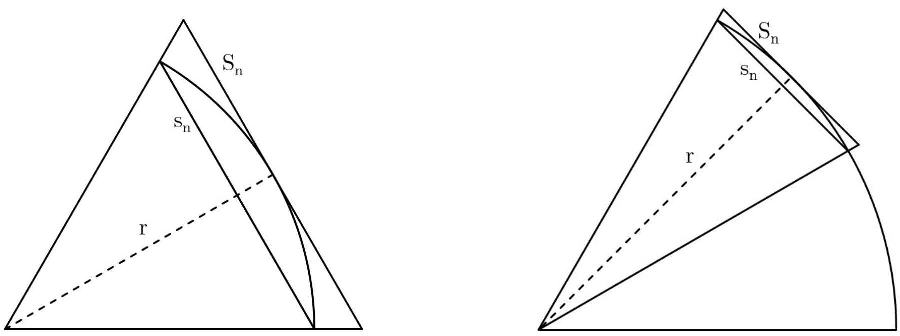


Abbildung 2: Seitenlängen von eingeschriebenem und umschriebenem Polygon bei Seitenverdopplung, Radius des Einheitskreises $r = 1$.

24 vgl. Scholz, 2001, S.7f.
25 vgl. Hein, 2012, S.157.
26 vgl. Alten, et al., 2014, S.96.
27 vgl. Blatner, 2000, S.18f.
28 vgl. Stewart, 2018, S.234f.
29 vgl. Scholz, 2001, S.11ff.
30 vgl. Schmidt, 2001, S.21f.

Für die Berechnung eines eingeschriebenen Vielecks gilt für die Seitenlänge $s_{2n}$ bei Seitenverdopplung folgende Formel, vgl. Abb. 2,

$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}.$$

Für die Seitenlänge $S_{2n}$ des umschriebenen Vielecks gilt für die Seitenverdoppelung folgende Formel:

$$S_{2n} = 2 \cdot \sqrt{\frac{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}}.$$

Für die Seitenlänge $S_n$ des umschriebenen Vielecks ergibt sich aus dessen eingeschriebener Seite $s_n$

$$S_n = 2 \cdot \frac{s_n}{\sqrt{4 - s_n^2}}.$$

Für die Seitenlänge $s_n$ der eingeschriebene Vielecke erhält man folgende Entwicklung:

$$\begin{aligned}
s_{4n} &= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}}, \\
s_{8n} &= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}}}, \\
s_{16n} &= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}}}}
\end{aligned}$$

und so weiter.

Zur annäherungsweisen Berechnung für $\pi$ gilt

$$\pi = \frac{\text{Polygonumfang}}{\text{Kreisdurchmesser}}.$$

Dieser Ansatz stammt – wie schon erwähnt – von Archimedes und ist über 2200 Jahre alt. Bei jeder Verdopplung der Seitenzahl des Polygons wird eine zusätzliche Wurzel hinzugefügt. Dadurch wird die Zahl $\pi$ immer und immer genauer und der Fehler der Annäherung immer kleiner.

Archimedes war mit diesen Ergebnissen jedoch noch nicht zufrieden und entwickelte eine zweite Methode: Umfang des eingeschriebenen Vielecks $< 2r\pi <$ Umfang des umschriebenen Vielecks.[31]

$$r \cdot 2n \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) < 2r\pi < r \cdot 2n \cdot \tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right).$$

31 vgl. Schmidt, 2001, S.23.

Da dem Griechen damals jedoch noch keine Sinus- und Tangenstabellen zur Verfügung standen, nutzte er den Satz des Pythagoras und den Halbwinkelsatz. Trotz dieser erschwerten Bedingungen ist die Genauigkeit, mit welcher er $\pi$ berechnete, beeindruckend. Mit einem 96-seitigen Polygon berechnete er $\pi$ in einem Bereich von:[32, 33]

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7} \quad \Rightarrow \quad 3,140845 < \pi < 3,142857. \tag{5}$$

Bestimmt man den Fehler mit den beiden Randwerten dieser Näherung erhält man:

$$\frac{3,140\,845 - \pi}{\pi} \cdot 100 \approx 0,0238\%$$

bzw.

$$\frac{3,142\,857 - \pi}{\pi} \cdot 100 \approx 0,0402\%.$$

Diese Methode von Archimedes wurde im Jahr 1593 von François Viète (siehe Kapitel 4.1) wieder aufgegriffen und er schränkte $\pi$ mit Hilfe eines Polygons mit 393 216 Seiten zwischen folgenden Werten ein:[34, 35]

$$3,141\,592\,653\,5 < \pi < 3,141\,592\,653\,7.$$

Wenn man von diesen zwei Zahlen das arithmetische Mittel bildet, dann ergibt sich der Wert

$$\pi_m = \frac{3,141\,592\,653\,5 + 3,141\,592\,653\,7}{2} = 3,141\,592\,653\,6,$$

der auf acht Stellen genau ist!

32 vgl. Stewart, 2018, S.206.
33 vgl. Scholz, 2001, S.16.
34 vgl. Schmidt, 2001, S.34.
35 vgl. Blatner, 2000, S.32.

# 3 $\pi$ im Osten

## 3.1 China

China war eine der ersten mathematischen und wissenschaftlichen Kulturen.[36, 37] Obwohl die Chinesen im 12. Jh. v. Chr. in vielen Bereichen verschiedener Wissenschaften große Erfolge erzielten, kam in ihren Berechnungen für $\pi$ nur der Wert 3 vor.[38] Ch'ang Hong war zu Beginn des zweiten Jahrhunderts n. Chr. Minister und Astrologe beim Kaiser An Ti.[39] Bevor er im Jahre 139 starb, notierte er, dass das Verhältnis der Quadrate von Umfang eines Kreises zu Umfang des umschriebenen Quadrats $\frac{5}{8}$ sei. Wenn man dies auf den Einheitskreis überträgt, erhält man

$$\frac{(2\pi)^2}{8^2} = \frac{\pi^2}{16} = \frac{5}{8}.$$

Nach Auflösen dieser Gleichung ergibt sich

$$\pi = \sqrt{10} \approx 3,162 \tag{6}$$

und ein Fehler von

$$\frac{3,162 - \pi}{\pi} \cdot 100 \approx 0,65\%.$$

Obwohl dieser Wert sowohl in der Mathematik als auch im Alltag zu extremer Ungenauigkeit führte, benutzten die Chinesen diesen Wert fast 100 Jahre lang. Dann berechnete Wang Fau einen neuen Wert für $\pi$.[40] Er stellte fest, dass ein Kreis mit einem Umfang von 142 Einheiten einen Durchmesser von 45 Einheiten hat. Daraus folgt

$$\pi = \frac{142}{45} = 3,1\dot{5}. \tag{7}$$

Setzt man diesen Wert in die Formel zur Fehlerberechnung ein, erhält man

$$\frac{3,1\dot{5} - \pi}{\pi} \cdot 100 \approx 0,444\%.$$

Der große Durchbruch gelang jedoch erst im fünften Jahrhundert. Tsu Ch'ung Chi und sein Sohn Tsu Keng Chi berechneten $\pi$ mit Hilfe eingeschriebener Polygone mit bis zu 24 576 Seiten.[41, 42] Das heißt, sie verdoppelten ein Sechseck zwölf Mal. Daraus gewannen sie die Erkenntnis, dass

36 vgl. Blatner, 2000, S.23.
37 vgl. Alten, et al., 2014, S.112ff.
38 vgl. Hein, 2012, S.88.
39 vgl. Blatner, 2000, S.24.
40 vgl. Schmidt, 2001, S.26.
41 vgl. Scholz, 2001, S.18.
42 vgl. Blatner, 2000, S.24f.

$$\pi = \frac{355}{113} \approx 3,141\,592\,92 \tag{8}$$

ist. Dieser Wert für $\pi$ war 1 000 Jahre lang der genaueste errechnete Wert mit einer Abweichung von unglaublichen $0,000\,008\,49\%$ von dem uns heute bekannten Wert:

$$\frac{\frac{355}{113} - \pi}{\pi} \cdot 100 \approx 0,000\,008\,49\%.$$

## 3.2 Indien

Seit der Antike gibt es in Indien sehr fortschrittliche mathematische Untersuchungen und Rechenvorschriften. Dies galt auch für das Berechnen der Zahl $\pi$. Diese Zahl kommt auch schon in vielen mathematischen Texten vor, welche über 4 000 Jahre alt sind. Ein Buch mit Rechenregeln besagt, dass die Seitenlänge $s_q$ eines Quadrats mit dem gleichen Flächeninhalt wie ein Kreis mit dem Durchmesser $d$ wie folgt bestimmt werden kann:[43]

> To transform a circle into a square, the diameter is divided into eight parts; one [such] part after being divided into twenty-nine parts is reduced by twenty-eight of them and further by the sixth [of the part left] less the eighth [of the sixth part].[44]

Man erhält für die Seitenlänge $s_q$ des Quadrats

$$s_q = \frac{d}{8} \cdot \left(7 + \frac{1}{29} \cdot \left(1 - \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{8}\right)\right)\right) = d \cdot \frac{9\,785}{11\,136}.$$

Daraus ergibt sich für

$$\pi = \frac{4s_q^2}{d^2} = \frac{4}{d^2} \cdot \left(d \cdot \frac{9\,785}{11\,136}\right)^2 = 4 \cdot \left(\frac{9\,785}{11\,136}\right)^2 \approx 3,0883 \tag{9}$$

und ein Fehler von

$$\frac{3,0883 - \pi}{\pi} \cdot 100 \approx 1,706\%.$$

43 vgl. Schmidt, 2001, S.44.

44 Plofker, Kim: Mathematics in India. In Katz, Victor J.: The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam: A Sourcebook. - Princeton University Press, 2007, S.391.

Der Inder Arya-Bhata schrieb im Jahre 499 n. Chr. der Zahl $\pi$ den Wert

$$3 + \frac{177}{1\,250} = 3,1416 \tag{10}$$

zu.[45, 46, 47] Dieser Wert ist mit einem Fehler von

$$\frac{3,1416 - \pi}{\pi} \cdot 100 \approx 0,000\,234\%$$

behaftet. In seinem Dokument „Siddhanta“ steht: „Addiere 4 zu 100. Multipliziere diese Summe mit 8. Addiere 62 000 zu diesem Produkt. Dies ergibt den Umfang eines Kreises mit dem Durchmesser 20 000.“

Wandelt man diese Aussage in eine Rechnung um, so erhält man:

$$\begin{aligned} 100 + 4 &= 104, \\ 104 \cdot 8 &= 832, \\ 832 + 62\,000 &= 62\,832. \end{aligned}$$

Das heißt, dass laut Aussage von Arya-Bhata ein Kreis mit dem Durchmesser 20 000 Einheiten einen Umfang von 62 832 Einheiten hat. Überprüft man dieses Ergebnis mit der uns heute zur Verfügung stehenden Formel zur Berechnung des Kreisumfangs

$$u = d \cdot \pi,$$

dann erhält man

$$\pi \cdot 20\,000 \approx 62\,831,853\,07.$$

Auf die Einerstelle gerundet stimmt der Wert mit dem von Arya-Bhata perfekt überein. Durch Umformen kann man nun im Rückkehrschluss einen Näherungswert für $\pi$ berechnen:

$$\begin{aligned} 62\,832 &= \pi \cdot 20\,000 \\ \frac{62\,832}{20\,000} &= \pi \\ \pi &= 3,1416. \end{aligned}$$

Somit hat der Inder die Kreiszahl auf vier Nachkommastellen genau bestimmt.

45 vgl. Schmidt, 2001, S.44.
46 vgl. Scholz, 2001, S.18f.
47 vgl. Blatner, 2000, S.26.

Noch lange davor, genauer gesagt im 8. Jh. v. Chr., entstanden Priesterhandbücher, die „Sulba-sutras“,[48] welche die Approximationen

$$\sqrt{\frac{\pi}{4}} \approx \frac{7}{8} + \frac{1}{8 \cdot 29} - \frac{1}{8 \cdot 29} \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6 \cdot 8}\right)$$

und

$$\sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{2 + \sqrt{2}} \tag{11}$$

angeben. Damit ergeben sich die Werte $\pi = 3,088\,326$ bzw. $\pi \approx 3,088\,312$.

Hier ist jedoch ein deutlicher Unterschied in der Genauigkeit zu erkennen:

$$\frac{(3,088\,326 - \pi)}{\pi} \cdot 100 \approx 1,695\%$$

bzw.

$$\frac{(3,088\,311 - \pi)}{\pi} \cdot 100 \approx 1,696\%$$

Brahmagupta, der bekannteste indische Mathematiker des siebenten Jahrhunderts, wählte irrtümlicherweise einen falschen Weg.[49] Er dachte, ein Muster könnte auftreten und somit das Rätsel um $\pi$ gelöst werden. Damit lag er jedoch falsch. Er berechnete die Summe der Seitenlängen von Polygonen mit 12, 24, 48 und 96 Seiten, die einem Kreis eingeschrieben sind, und erhielt die Ergebnisse $\sqrt{9,65}$,$\sqrt{9,81}$,$\sqrt{9,86}$ und $\sqrt{9,87}$. Daher dachte er, dass sich $\pi$ dem Wert von $\sqrt{10}$ annähert.

Noch viel interessanter sind jedoch die indischen Summenreihen aus dem 15. Jahrhundert, welche in den sogenannten „Yutki-Bhasa“- und „Yutki-Dipika“-Schriften festgehalten wurden.[50] In ihnen sind acht Reihenentwicklungen niedergeschrieben, welche auf ein Näherungsergebnis für $\pi$ führen. Der Inder Nila Kantha (1444–1545) hielt die Reihen im Werk „Sangrahan“ das erste Mal schriftlich fest,[51] er hatte sich selbst jedoch nicht sonderlich viele Gedanken über die Zahl $\pi$ gemacht, sondern Madhavan (1340–1425), welcher diese erstaunlichen Reihen zusammengestellt, nicht aber schriftlich festgehalten hatte.

48 vgl. Scholz, 2001, S.6f.
49 vgl. Scholz, 2001, S.18.
50 vgl. Schmidt, 2001, S.44f.
51 vgl. Schmidt, 2001, S.44f.

Diese acht Reihen sind (mit $p \in \mathbb{N}_g$):

$$
\begin{aligned}
\pi &= 2 + \frac{4}{2^2-1} - \frac{4}{4^2-1} + \frac{4}{6^2-1} - ... \mp \frac{4}{p^2-1} \pm \frac{4}{2(p+1)^2} \\
\pi &= 3 + \frac{4}{3^3-3} - \frac{4}{5^3-5} + \frac{4}{7^3-7} - \dots \\
\frac{\pi}{2} &= \sqrt{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3^1} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \frac{1}{9 \cdot 3^4} - \dots\right) = \sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) \cdot 3^n} \\
\frac{\pi}{4} &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \mp \frac{1}{p-1} \pm \frac{\frac{p}{2}}{p^2+1} \\
\frac{\pi}{4} &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \mp \frac{1}{p-1} \pm \frac{\frac{p^2}{4}+1}{\frac{p}{2}(p^2+4p+1)} \\
\frac{\pi}{8} &= \frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{6^2-1} + \frac{1}{10^2-1} + \frac{1}{14^2-1} + \dots \\
\frac{\pi}{8} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{8^2-1} - \frac{1}{12^2-1} + \frac{1}{16^2-1} - \dots \\
\frac{\pi}{16} &= \frac{1}{1^5+4\cdot 1} - \frac{1}{3^5+4\cdot 3} + \frac{1}{5^5+4\cdot 5} - \frac{1}{7^5+4\cdot 7} + \dots
\end{aligned}
$$

Weiters gab es in Indien um ca 400 n. Chr. einen weiteren wesentlichen, mathematischen Fortschritt. Erstmals wurde die Zahl Null mit einem eigenen Symbol schriftlich festgehalten. In Verbindung mit dem Dezimalsystem war nun das Aufstellen von Rechenregeln und das Rechnen an sich deutlich leichter. Diese Methode bewährte sich so gut, dass sie sich von Indien nach Europa ausbreitete, wo sie bis heute noch verwendet wird.[52]

## 3.3 Arabien

Der ägyptische Astronom, Physiker und Mathematiker Ibn Alhaitam (958–1038) befasste sich mit dem menschlichen Auge, erfand die einfachste Form einer Kamera, formulierte das Reflexionsgesetz und widmete sich Berechnungen im Bereich der Optik.[53] Außerdem beschäftigte er sich mit der Quadratur des Kreises. Jemshid Al-Kashi, einem Perser, gelang es, $\pi$ bis auf 16 Dezimalstellen genau zu berechnen. Diese Meisterleistung gelang Al-Kashi erst, als er Ziffern des Sexagesimalsystems in indische Ziffern umschrieb.[54]

Im heutigen Irak lebte im 9. Jahrhundert der vermutlich größte arabische Mathematiker Al-Khwarizmi. Er zog für seine Berechnungen die Formeln von Archimedes, Gl. (5), Ch'ang Hong, Gl. (6) und Arya-Bhata, Gl. (10) heran und versuchte mit diesen Werten $\pi$ zu errechnen.[55, 56] Im Unterschied zu seinen Vorgängern verwendete er jedoch die hindu-arabischen Zahlen, welche die Null und das Dezimalkomma einschließen.

52 vgl. Schmidt, 2001, S.15.
53 vgl. Brockhaus, 2005, S.2395.
54 vgl. Scholz, 2001, S.19.
55 vgl. Blatner, 2000, S.30.
56 vgl. Hein, 2012, S.88.

# 4 $\pi$ wird unendlich

## 4.1 François Viète

Die erste erwähnungswürdige Aktivität auf dem Gebiet der Berechnung von $\pi$ in der Neuzeit kam von dem Franzosen François Viète (lat. Franciscus Vieta) (1540–1603).[57] Dieser führte die Buchstabensymbolik in die Mathematik, insbesondere in die Algebra ein, wodurch das Lösen geometrischer Gleichungen ermöglicht wurde.[58] Seine Methode zur Berechnung der Kreiszahl basiert auf der Beziehung zwischen einem n-seitigen und einem 2n-seitigen Vieleck.[59]

Mit

$$\alpha = \text{halber Winkel des n-seitigen Vielecks} = \text{Winkel des 2n-seitigen Vielecks}$$

und

$$F = \text{Fläche des Vielecks}$$

wird

$$\begin{aligned} F_{(n)} &= n \cdot r^2 \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) \\ F_{(2n)} &= n \cdot r^2 \cdot \sin(\alpha) \end{aligned}$$

und damit

$$\frac{F_{(n)}}{F_{(2n)}} = \cos(\alpha).$$

Bei weiterer Verdopplung der Seiten ergibt sich

$$\frac{F_{(n)}}{F_{(4n)}} = \frac{F_{(n)}}{F_{(2n)}} \cdot \frac{F_{(2n)}}{F_{(2^2n)}} = \cos(\alpha) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Bei i-maliger Verdopplung wird

$$\frac{F_{(n)}}{F_{(2^in)}} = \cos(\alpha) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2^2}\right) \cdot \ldots \cos\left(\frac{\alpha}{2^i}\right).$$

Mit i gegen unendlich erhält man

$$\lim_{i \to \infty} F_{(2^in)} = \pi \cdot r^2$$

57 vgl. Blatner, 2000, S.32ff.
58 vgl. Brockhaus, 2005, S.6800.
59 vgl. Schmidt, 2001, S.33.

und unter Verwendung des Halbwinkelsatzes

$$\pi = \frac{\frac{1}{2} \cdot n \cdot \sin(2\alpha)}{\cos(\alpha) \cdot \cos(\frac{\alpha}{2^1}) \cdot \cos(\frac{\alpha}{2^2}) \cdot \cos(\frac{\alpha}{2^3}) \ldots \cos(\frac{\alpha}{2^n})}.$$

Wenn man, wie Viète, mit einem Quadrat beginnt, dann erhält man

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\alpha}{2^0}\right) &= \sqrt{\frac{1}{2}}, \\
\cos\left(\frac{\alpha}{2^1}\right) &= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}}, \\
\cos\left(\frac{\alpha}{2^2}\right) &= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}}}, \\
\cos\left(\frac{\alpha}{2^3}\right) &= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}}}}.
\end{aligned}$$

Der daraus entstehende Näherungswert für $\pi$ ist daher

$$\pi = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}}}} \cdot \ldots}. \tag{12}$$

Der Ansatz von Viète war im Grunde genommen der gleiche wie der von Archimedes: eine unendlich lange Kette. Der einzige Unterschied zwischen dem Griechen und Viète liegt darin, dass Viète die Berechnung von $\pi$ mit Archimedes' Methode praktisch durchführte. Mit Hilfe eines Polygons mit 393 216 Seiten berechnete er neue Grenzwerte für $\pi$:[60]

$$3,141\,592\,653\,5 < \pi < 3,141\,592\,653\,7. \tag{13}$$

Bildet man das Mittel dieser beiden Zahlen, also $3,141\,592\,653\,6$, und bestimmt dann den Fehler, stellt man fest, dass dieser extrem klein ist:

$$\frac{(3,141\,592\,653\,6 - \pi)}{\pi} \cdot 100 \approx 3,249\,96 \cdot 10^{-10}\%.$$

60 vgl. Schmidt, 2001, S.34.

## 4.2 John Wallis

Noch einen Schritt weiter kam der britische Mathematiker und Professor an der Oxford-University John Wallis (1616–1703), der ein Zeitgenosse des Astronoms, Mathematikers und Physikers Christiaan Huygens (1629–1695) war. Wallis führte nicht nur das Symbol $\infty$ für „unendlich" ein,[61] sondern widmete seine Zeit auch der Berechnung der Kreiszahl $\pi$. In einem seiner Bücher „Arithmetica Infinitorum" veröffentlichte er 1655 seine wohl wichtigste Formel, die bis heute seinen Namen trägt. Die Gleichung, auch Wallis Produkt genannt,[62] beruht auf den gleichen Grundlagen wie jene von Viète. Der einzige und wesentliche Unterschied liegt darin, dass die Gleichung von John Wallis ohne die Quadratwurzeln auskommt.[63]

Die Gleichung

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

führt über

$$\int \sin^n x \,\mathrm{d}x = \frac{-\cos x \cdot \sin^{n-1} x}{n} + \frac{(n-1)}{n} \cdot \int \sin^{n-2} x \,\mathrm{d}x$$

zu dem Ergebnis

$$1 = \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(2n)^2}\right) = \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n)^2 - 1}{(2n)^2}\right).$$

Aus diesem Ergebnis ergibt sich dann die Formel, mit der Wallis $\pi$ näherungsweise berechnete,[64, 65]

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \frac{(2\cdot 2)(4\cdot 4)(6\cdot 6)\dots}{(1\cdot 3)(3\cdot 5)(5\cdot 7)\dots} \dots \frac{2n}{(2n-1)} \cdot \frac{2n}{(2n+1)} \\ \frac{\pi}{2} &= 2 \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\right). \end{aligned} \tag{14}$$

In den Jahrzehnten darauf wurden viele Versuche angestellt, $\pi$ genauer zu berechnen. Viele gute Ansätze wurden gefunden, aber keiner davon führte zu einem brauchbaren Ergebnis, da die Reihen zum Beispiel zu langsam konvergierten.[66]

61 vgl. Brockhaus, 2005, S.6911.
62 vgl. Brockhaus, 2005, S.6911.
63 vgl. Schmidt, 2001, S.36.
64 vgl. Schmidt, 2001, S.36.
65 vgl. Blatner, 2000, S.40.
66 vgl. Schmidt, 2001, S.37.

## 4.3 James Gregory

Der schottische Mathematiker und Astronom James Gregory (1638–1675) entdeckte eine ganz neue Möglichkeit, $\pi$ über den Arcustangens zu berechnen.[67, 68] Mit der Entdeckung der Gregory-Reihe im Jahre 1671

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11}...,$$

einer relativ simplen Arcustangensreihe, begann ein neuer Zeitabschnitt in der Berechnung der Kreiszahl. Doch wie startete solch eine Reihe und der Arcustangens eine neue Ära? Der Tangens von 45° ist 1, und 45° sind $\frac{\pi}{4}$ rad. Wenn man also den Arcustangens von 1 ermittelt, dann erhält man $\frac{\pi}{4}$ rad. Somit kann man durch Einsetzen der Zahl 1 in die Gregory-Reihe ein Viertel der Kreiszahl, und damit auch $\pi$ selbst ausrechnen.[69]

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}. \tag{15}$$

Erstaunlich ist, dass James Gregory selbst laut seinen Aufzeichnungen nie die Zahl 1 in seine Reihe einsetzte. Hätte er dies getan, so hätte dieser selbst eine Reihenentwicklung zur Berechnung der Kreiszahl entdeckt. Dies tat erst Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) im Jahr 1976.[70, 71] Allerdings ist zu beachten, dass die auf $\frac{\pi}{4}$ umgeformte Formel extrem langsam konvergiert. So erhält man nach 300 Gliedern der fortgeführten Reihe erst zwei Nachkommastellen für $\pi$. Daher kann man keine nützlichen Ergebnisse mit dieser Reihe erreichen.[72, 73]

## 4.4 John Machin

Eine weitere Möglichkeit, $\pi$ zu berechnen, ist den Einheitskreis zu verwenden:[74] Wenn der Radius dieses Kreises $r = 1$ ist, dann ist der Umfang dieses Kreises $2\pi$. Wenn man nicht 360°, sondern $2\pi$ rad als Vollkreis bezeichnet, dann lassen sich Teilwinkel sehr gut zur Berechnung von $\pi$ verwenden.[75]

67 vgl. Blatner, 2000, S.40.
68 vgl. Methoden zur Berechnung der Kreiszahl $\pi$, https://www.tu-ilmenau.de, 2020, S.23.
69 vgl. Blatner, 2000, S.41.
70 vgl. Schmidt, 2001, S.37
71 vgl. Blatner, 2000, S.41
72 vgl. Blatner, 2000, S.41.
73 vgl. Methoden zur Berechnung der Kreiszahl $\pi$, https://www.tu-ilmenau.de, 2020, S.25.
74 vgl. Schmidt, 2001, S.38.
75 vgl. Schmidt, 2001, S.38.

Für die Sinusfunktion erhält man:

$$
\begin{aligned}
\sin 30^\circ &= \frac{1}{2} & \qquad \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{\pi}{6}\\
\sin 45^\circ &= \frac{\sqrt{2}}{2} & \qquad \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= \frac{\pi}{4}\\
\sin 60^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} & \qquad \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) &= \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}
$$

Für die Cosinusfunktion erhält man:

$$
\begin{aligned}
\cos 30^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} & \qquad \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) &= \frac{\pi}{6}\\
\cos 45^\circ &= \frac{\sqrt{2}}{2} & \qquad \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= \frac{\pi}{4}\\
\cos 60^\circ &= \frac{1}{2} & \qquad \arccos\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}
$$

Für die Tangensfunktion erhält man:

$$
\begin{aligned}
\tan 30^\circ &= \frac{1}{\sqrt{3}} & \qquad \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= \frac{\pi}{6}\\
\tan 45^\circ &= 1 & \qquad \arctan(1) &= \frac{\pi}{4}\\
\tan 60^\circ &= \sqrt{3} & \qquad \arctan\left(\sqrt{3}\right) &= \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}
$$

Dabei entstehen folgende Potenzreihen für die Kreis-Funktionen:[76, 77]

$$
\begin{aligned}
\arcsin(x) &= \frac{x^1}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots\\
\arctan(x) &= \frac{x^1}{1}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\cdot\frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9}\cdot\frac{x^{11}}{11} + \ldots.
\end{aligned}
$$

Diese Potenzreihenentwicklung der arctan-Funktion, bei welcher $x = 1$ ist, machte sich der Engländer John Machin (1680–1751) zu Nutze. Der Mann, der nicht nur Mathematik, sondern auch Astronomie an der Universität London unterrichtete, stellte auch eine sehr schnell konvergierende Formel mit Hilfe der vorher genannten Winkelteilung, der arctan-Funktion und der Verdopplungsformel für $\tan(2\alpha)$ auf:

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\cdot\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$$

76 vgl. Schmidt, 2001, S.39.
77 vgl. Scholz, 2001, S.28.

Wenn man für $\tan(\alpha) = \frac{1}{5}$ einsetzt, erhält man

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \cdot \dfrac{1}{5}}{1 - \left(\dfrac{1}{5}\right)^2} = \frac{10}{25-1} = \frac{5}{12},$$

und weiter

$$\tan(4\alpha) = \frac{2 \cdot \tan(2\alpha)}{1 - \tan^2(2\alpha)} = \frac{2 \cdot \dfrac{5}{12}}{1 - \left(\dfrac{5}{12}\right)^2} = \frac{120}{119} = 1 + \frac{1}{119}.$$

Das heißt, dass $4\alpha$ nahezu gleich $45°$ ist, aber doch etwas größer. Daraus folgt auch, dass $4\alpha$ nahezu gleich $\frac{\pi}{4}$ ist. Es ergibt sich

$$\tan\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1 + \tan(4\alpha)}{1 + \tan(4\alpha)} = \frac{1}{239},$$

und weiter

$$\frac{\pi}{4} = 4 \cdot \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

Damit ergab sich dann folgende Formel, die bis heute noch seinen Namen trägt: die Machin'sche Formel:[78, 79]

$$\pi = 16 \cdot \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - 4 \cdot \arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

Mit dieser Formel, welche bis vor Kurzem verwendet wurde, um mit Hilfe von Computern $\pi$ auf viele Stellen zu ermitteln, berechnete John Machin die magische Zahl auf 100 Dezimalstellen.[80]

Da diese Formel jedoch sehr kompliziert zu verwenden ist, empfahl John Machin selbst im Jahr 1706 eine allgemeine Darstellung, um einen Arcustangens-Wert in zwei Summanden zu zerlegen. Diese Formel ist zwar für die direkte Berechnung von $\pi$ nicht essentiell, macht das Ganze aber deutlich leichter:[81]

$$\arctan(u) + \arctan(v) = \arctan\left(\frac{u+v}{1-uv}\right),$$

mit

$$u = \tan(\alpha) \text{ und } v = \tan(\beta).$$

78 vgl. Schmidt, 2001, S.39.
79 vgl. Scholz, 2001, S.27.
80 vgl. Stewart, 2018, S.242.
81 vgl. Schmidt, 2001, S.40.

## 4.5 Leonhard Euler

Leonhard Euler (1707–1783) war ein Schweizer Mathematiker und Physiker.[82, 83] Wegen seiner Beiträge zur Analysis, zur Zahlentheorie und zu vielen weiteren Teilgebieten der Mathematik gilt er als einer der bedeutendsten Mathematiker aller Zeiten. Er setzte in die Formel von Machin für $u = \tan(\alpha) = \frac{1}{2}$ und $v = \tan(\beta) = \frac{1}{3}$ ein und erhielt aus der allgemeinen Formel:[84]

$$\frac{(u+v)}{(1-uv)} = 1$$

und

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right),$$

woraus sich folgende Werte ergeben:

$$\alpha = 26{,}565\,051\,1\ldots^\circ = 0{,}462\,647\,608\ldots\,\text{rad},$$

$$\beta = 18{,}434\,948\,8\ldots^\circ = 0{,}321\,750\,554\ldots\,\text{rad}.$$

Somit ist

$$\alpha + \beta = 45^\circ = \frac{\pi}{4} = 0{,}785\,398\,163\ldots\,\text{rad},$$
$$\pi = 4 \cdot (\alpha + \beta) = 3{,}141\,592\,653\,5\ldots\,\text{rad}.$$

Er kannte auch noch eine weitere Methode zur Zerlegung der arctan-Reihe:[85]

$$\arctan\left(\frac{1}{p}\right) = \arctan\left(\frac{1}{p+q}\right) + \arctan\left(\frac{p}{p^2+pq+1}\right).$$

Der Schweizer Mathematiker war nicht nur ein brillanter, sondern auch ein äußerst produktiver Mensch. Seine 886 Bücher, welche er veröffentlichte, waren alle von mathematisch fundamentaler Wichtigkeit. Auch entwickelte er eine Vielzahl von unendlichen Reihen zur Berechnung von $\pi$ und $\pi^2$. Mit seiner effektivsten Formel mit verbesserter Konvergenz konnte er bis zu 20 Nachkommastellen von $\pi$ in einer Stunde berechnen:[86]

$$\arctan(x) = \frac{y}{x} \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot y + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot y^2 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot y^3 + \ldots\right)$$

mit

$$y = \frac{x^2}{1+x^2}.$$

82 vgl. Schmidt, 2001, S.40f.
83 vgl. Blatner, 2000, S.43.
84 vgl. Schmidt, 2001, S.40.
85 vgl. Schmidt, 2001, S.42.
86 vgl. Schmidt, 2001, S.42.

Weitere Formeln von Leonhard Euler, die er zur Berechnung von $\pi$ verwendete, sind:[87, 88, 89]

$$\pi + 3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 2^n}{\binom{2n}{n}} \tag{16}$$

$$\frac{\pi}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{16^n \cdot (2n+1)}$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \tag{17}$$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{3^{n-1} \cdot (2n-1)}$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{(n^2-1)}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1) \cdot (4n+1)}$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$$

$$\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}(\log 2)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n^2}$$

$$\frac{\pi^3}{32} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \tag{18}$$

$$\frac{\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n^4}$$

$$\frac{\pi^4}{96} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{(2n+1)^4}$$

$$\frac{7\pi^2}{720} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n^4}.$$

87 vgl. Schmidt, 2001, S.42f.
88 vgl. Stewart, 2018, S.237.
89 vgl. Blatner, 2000, S.44.

### 4.6 Johann Heinrich Lambert

Einen weiteren endgültigen Beweis dafür, dass $\pi$ irrational ist, brachte der Schweizer Mathematiker Johann Heinrich Lambert (1728–1777).[90] Im Jahre 1761 argumentierte er wie folgt: wenn $\tan(x)$ rational ist, dann muss $x$ irrational sein, denn $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$, und damit ist $\frac{\pi}{4}$ und natürlich auch $\pi$ irrational.[91]

Eine weitere Methode, unendlich viele Stellen einer Zahl zu bestimmen, ist die Verwendung von Kettenbrüchen. Mit Hilfe des größten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen lässt sich ein unendlich langer Bruch für die Annäherung an die Zahl $\pi$ anschreiben.

Nachdem es Euler gelang, sowohl die Euler'sche Zahl $e$ als auch die Kreiszahl $\pi$ als einfachen, unendlichen Kettenbruch anzuschreiben, fand der Schweizer Mathematiker Johann Heinrich Lambert eine etwas interessante Schreibweise:[92]

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \ldots}}}}.$$

Eine weitere Reihenentwicklung Lamberts ist der folgende, etwas einfachere Kettenbruch:[93]

$$\pi = 3 + \cfrac{1^2}{6 + \cfrac{3^2}{6 + \cfrac{5^2}{6 + \cfrac{7^2}{6 + \ldots}}}} = \cfrac{4}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \ldots}}}}. \qquad (19)$$

90 vgl. Schmidt, 2001, S.47.
91 vgl. Schmidt, 2001,S.107.
92 vgl. Schmidt, 2001, S.48.
93 vgl. Schmidt, 2001, S.47.

## 4.7 Ferdinand Lindemann

Die Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal ist ein Problem, mit welchem sich schon die alten Griechen beschäftigten. Innerhalb von 2 000 Jahren ist es niemandem gelungen, was die Griechen schon probiert haben. Das Problem wurde 1882 schließlich von Ferdinand Lindemann (1852–1939) gelöst. Er bewies, dass es nicht möglich ist, eine Quadratur des Kreises ausschließlich nur mit Zirkel und Lineal durchzuführen.[94, 95]

Doch was ist eigentlich das Problem?

Gegeben ist ein Kreis mit dem Radius r. Gesucht ist ein Quadrat, das den gleichen Flächeninhalt aufweist wie der Kreis. Dieses Quadrat soll nur mit Hilfe von Zirkel und Lineal in endlich vielen Schritten konstruiert werden. Dabei darf der Zirkel nur zum Schlagen eines Kreises um einen gegebenen Mittelpunkt, das Lineal nur zum Zeichnen einer Geraden durch zwei gegebene Punkte benutzt werden.[96]

Die Griechen haben sehr bald erkannt, dass der Flächeninhalt proportional zu $r^2$, also $A = c \cdot r^2$ ist, aber c keine rationale Zahl ist. Erst Lindemann zeigte, dass c im klassischen Sinn auch keine irrationale Zahl ist, also keiner algebraischen Gleichung genügt, d.h. es gibt keine Gleichung[97]

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0$$

mit ganzzahligen Koeffizienten $a_k (k = 0 \ldots n) \in \mathbb{N}$, die durch $c = x$ erfüllt wird.

Die Kreiszahl $\pi$ liegt also außerhalb der Menge, die als algebraische Zahlen definiert ist. Sie überschreitet die Grenzen der Algebra und wird daher transzendente Zahl genannt. Dadurch bewies Lindemann, dass die Quadratur des Kreises (mit Zirkel und Lineal) unmöglich ist.[98, 99]

94 vgl. Stewart, Ian: Die letzten Rätsel der Mathematik. - Reinbeck bei Hamburg: Rowohlt e-Book Verlag, 2015, S.71.
95 vgl. Schmidt, 2001, S.28.
96 vgl. Stewart, 2015, S. 54f.
97 vgl. Alten, et al., 2014, S.96.
98 vgl. Stewart, 2015, S.71f.
99 vgl. Stewart, 2018, S.245.

# 5 Moderne Berechnungen

## 5.1 Vorarbeiten

Fast 280 Jahre nach der Entdeckung der Gregory-Reihe und mehr als 60 Jahre nach der Erkenntnis Lindemanns, dass $\pi$ transzendent ist, wurde die letzte nennenswerte händische Berechnung durchgeführt. Der Engländer Ferguson berechnete im Jahre 1946 ohne technische Hilfsmittel 620 Stellen der Kreiszahl, indem er die Gregory-Reihe in Kombination mit der Machin-Formel weiter fortführte.[100]

Wenige Jahre später gelang ein neuer Durchbruch, jedoch mit einem Tischrechner als Hilfsmittel. Diesmal schaffte es Ferguson gemeinsam mit zwei Helfern, die 1 000-Dezimalstellen-Marke zu brechen. Ihnen gelang es, $\pi$ auf 1 120 Stellen genau zu berechnen.

## 5.2 Erste Berechnungen mittels Computer-Einsatz

### 5.2.1 Machin-Formel

Mit der Erfindung des Computers und dem Bau des ersten Rechencomputers, dem ENIAC (Electronic Numerical Integrator and Calculator), an der Universität in Pennsylvania, Philadelphia, U.S.A., wurde es mit einem Schlag möglich, extrem viele Dezimalstellen von $\pi$ in kurzer Zeit auszurechnen. Dieser Rechner wog unglaubliche 30 Tonnen, bedeckte eine Fläche von $140\text{m}^2$ und bestand aus ungefähr 18 000 Elektronenröhren und 50 000 Schaltungen. Aufgrund seiner Größe verbrauchte die Rechenmaschine unglaubliche Mengen an elektrischer Energie, war jedoch auch in der Lage, 300 verschiedene Rechenoperationen bzw. 5 000 Additionen in einer Sekunde durchzuführen.[101] Mit Hilfe dieses Computers war es 1949 möglich, 2 037 Dezimalstellen innerhalb von 70 Stunden zu bestimmen. Von nun an wurden immer mehr Stellen in immer kürzerer Zeit berechnet. Die Technologie entwickelte sich ständig weiter und somit stieg auch die Zahl der berechneten Stellen.[102]

Etwas mehr als 20 Jahre später, 1973, wurde schließlich die Millionengrenze durchbrochen. Jean Guilloud und Martine Bouyer, zwei Franzosen, berechneten auf einem CDC 7600 unglaubliche 1 001 250 Stellen in etwas weniger als 24 Stunden. Eine bis dahin unvorstellbare Meisterleistung, welche allerdings schon acht Jahre darauf überboten wurde. Innerhalb von 137 Stunden, also in knapp sechs Tagen, schaffte man es, 2 000 036 Nachkommastellen mit Hilfe einer Formel des Machin-Typs auszurechnen. Diese Berechnung war nicht nur ein neuer Rekord, sondern sollte auch die letzte große Berechnung dieser Art werden.[103]

100 vgl. Blatner, 2000, S.50f.
101 vgl. Brockhaus, 2005, S.1016.
102 vgl. Methoden zur Berechnung der Kreiszahl $\pi$, https://www.tu-ilmenau.de, 2020, S.26.
103 vgl. Methoden zur Berechnung der Kreiszahl $\pi$, https://www.tu-ilmenau.de, 2020, S.26.

### 5.2.2 AGM-Methode

Schon Anfang des 19. Jahrhunderts wurde das arithmetisch-geometrische Mittel, kurz AGM, von dem deutschen Mathematiker und Astronomen Carl Friedrich Gauß (1777–1855) untersucht.[104, 105]

Das arithmetische Mittel $\overline{x}$ (im Alltag „Durchschnitt“) ist

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \cdot (x_1 + x_2 + ... + x_n).$$

Das geometrische Mittel $\overline{x}_g$ ist definiert als

$$\overline{x}_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}.$$

E. Salamin leitete einen sehr effektiven Algorithmus zur Annährung an $\pi$ aus den Grundsätzen des AGM ab und veröffentlichte diesen. Für AGM($a_0$, $b_0$) erhält man mit $a_0 = 1$, $b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $c_0 = \frac{a_0 - b_0}{2}$ nach dem Standard-AGM:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \\ b_n &= \sqrt{a_{n-1} \cdot b_{n-1}}, \\ c_n &= \frac{a_n - b_n}{2}. \end{aligned}$$

In diesen Algorithmus eingesetzt entsteht mit $n$=1,2,3... und weiterführender Iteration:

$$\pi = \frac{4 \cdot a_{n+1}^2}{1 - \sum_{i=1}^{n} 2^{i+1} \cdot c_i^2}.$$

Salamin vermutete nach seiner Publikation, dass es mit dem damals hoch modernen Computer ILLIAC IV möglich gewesen wäre, innerhalb kürzester Zeit ungefähr 33 Millionen Dezimalstellen zu bestimmen.[106]

Zur Berechnung der Kreiszahl kam diese Methode jedoch erst 1982 in Verwendung. Die AGM-Methode war ein voller Erfolg. Innerhalb von 7 Stunden und 14 Minuten berechnete man 2 097 144 Stellen.[107]. Diese Methode ist so effizient, dass sich bei jedem Iterationsschritt die Anzahl der errechneten Nachkommastellen etwa verdoppelt und so erhält man nach dem zehnten Iterationsschritt 1 393 richtige Stellen.[108]

104 vgl. Brockhaus, 2005, S.2017.
105 vgl. Methoden zur Berechnung der Kreiszahl $\pi$, https://www.tu-ilmenau.de, 2020, S.26.
106 vgl. Schmidt, 2001, S.73.
107 vgl. Methoden zur Berechnung der Kreiszahl $\pi$, https://www.tu-ilmenau.de, 2020, S.26.
108 vgl. Schmidt, 2001, S.73.

## 5.3 Chudnovsky Brüder

Während die oben genannten Erfolge meist mit Hilfe von extrem großen, leistungsstarken Computern, welche meist vom Staat oder der NASA gebaut wurden, erzielt wurden, schafften die aus der UdSSR stammenden Geschwister Gregory (geb. 1952) und David (geb. 1947) Chudnovsky etwas Unglaubliches. Eigenständig bauten sie in ihrer Wohnung in Manhatten einen Rechencomputer aus konventionell erhältlichen Teilen und schafften es im Mai des Jahres 1989, mit dieser Rechenmaschine 480 Millionen Stellen zu bestimmen, 5 Jahre darauf berechneten sie 4 Milliarden Stellen. Nicht nur ein Weltrekord, sondern auch eine beachtliche Leistung, da die Brüder den Computer selbst bauten und sich zusätzlich dafür entschieden, keinen schnell konvergierenden Algorithmus, wie den von Borwein, Salamin oder Brent zu verwenden. Stattdessen zogen sie die von Ramanujan entdeckte, unendliche Reihenentwicklung heran. Diese Reihenentwicklung brachte bei jedem weiteren Schritt 18 richtige Stellen zum Vorschein.[109]

Die Reihe lautet:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{6\,541\,681\,608}{640\,330^{\frac{3}{2}}} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{13\,591\,409}{545\,140\,134} + k \right) \cdot \frac{(-1)^k \cdot (6k)!}{(3k)! \cdot (k!)^3 \cdot 640\,320^{3k}}.$$

In den Jahren danach wurden mit Hilfe neuer Reihen und Algorithmen unglaubliche Stellenrekorde erzielt und die Leistungen der Chudnovsky Brüder vorerst in den Schatten gestellt.

109 vgl. Schmidt, 2001, S.82.

## 5.4 Neue Reihenentwicklungen

Da die bis hierhin zur Näherung verwendeten Arcustangensreihen aufgrund ihrer linearen Konvergenz nur relativ langsam Ergebnisse liefern, war man auf der Suche nach Reihen, welche schneller konvergieren. Durch mehrere neue Methoden, aber auch Fortschritte in der Technik, konnte in den darauffolgenden Jahren die Konvergenzgeschwindigkeit der zur Verfügung stehenden Reihen in die Höhe getrieben werden. Einerseits geschah das durch die quadratisch konvergierenden Iterationsmethoden von Peirce Brent und Eugene Salamin und der Gebrüder David und Gregory Borwein, andererseits durch den 1971 entdeckten Schönhage-Strassen-Algorithmus zur Multiplikation zweier n-stelliger Zahlen. Weiters konnte die Anzahl der errechneten Stellen durch Verbesserungen in der Speicherkapazität und Rechengeschwindigkeit der Computer seitdem deutlich erhöht werden.[110]

So kam es, dass 1982, im selben Jahr als die AGM-Methode das erste Mal verwendet wurde, Yoshiaki Tamura und Yasumasa Kanada die Kreiszahl auf einem HITAC M-208H in knapp sieben Stunden auf 8 388 608 Stellen berechneten. Diese damalige Höchstleistung gelang aus einer Verbindung von Hochleistungscomputern und dem Gauß-Brent-Salamin-Algorithmus.[111] Somit konnten sich in diesen Jahren die Chudnovsky Brüder mit Hilfe von Ramanujan-Formeln und teilweise selbstgebauten Parallelrechnern immer wieder den Stellenrekord erobern. Diese Leistungen wurden jedoch 1999 in den Schatten gestellt, als der japanische Informatiker und Physiker Yasumasa Kanada (1949–2020) an der Universität in Tokio, Japan, einen bahnbrechenden Rekord aufstellte. Innerhalb von 37 Stunden bestimmte er mit dem Parallelrechner Hitachi SR8000 unglaubliche 206 158 430 000 Nachkommastellen der Kreiszahl (1997 bestimmten diese 51 Milliarden Stellen).[112, 113] Auf dieses Ergebnis antworteten die Gebrüder Chudnovsky mit einer Milliarde[114] Nachkommastellen.[115]

Einer der Chudnovsky-Algorithmen lautet:[116]

$$\frac{1}{\pi} = 12\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (6k)!(545\,140\,134k + 13\,591\,409)}{(3k)!(k!)^3 640\,320^{3k+\frac{3}{2}}}.$$

Mit Hilfe dieser, von David und Gregory Chudnovsky entdeckten Formel lassen sich pro Term 14 neue Nachkommastellen errechnen.

110 vgl. Lexikon der Mathematik: $\pi$, https://www.spektrum.de
111 vgl. Blatner, 2000, S.53.
112 vgl. Lexikon der Mathematik: $\pi$, https://www.spektrum.de
113 vgl. Blatner, 2000, S.53.
114 In den Quellen finden sich vermutlich wegen eines Übersetzungsfehlers vom Englischen ins Deutsche widersprüchliche Angaben.
115 vgl. Blatner, 2000, S.53.
116 vgl. Stewart, 2018, S.242.

## 5.5 Berechnung einzelner Stellen

Nachdem feststeht, dass $\pi$ transzendent und damit nicht vollständig berechenbar ist, haben es sich Wissenschafter und Mathematiker zur Aufgabe gemacht, beliebige Dezimalstellen der Kreiszahl zu bestimmen, ohne die vorangehenden Ziffern berechnet zu haben.[117, 118, 119] So entdeckten 1996 die Wissenschafter Bailey, Borwein und Plouffe folgende Formel zur Bestimmung einzelner Stellen:

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{4n}} \left( \frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right).$$

Mit Hilfe dieser Formel berechneten sie die zehnmilliardste Hexadezimalstelle von $\pi$. Im darauf folgenden Jahr gelang es Fabrice Bellard, die 100-milliardste, wieder ein Jahr später die 250-milliardste Stelle zu bestimmen. Bellard erreichte sein Ergebnis mit einer ähnlichen Formel, mit welcher sich die Stellen sogar noch leichter bestimmen ließen:[120]

$$\pi = \frac{1}{64} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{10n}} \left( -\frac{32}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} + \frac{256}{10n+1} - \right. \\ \left. - \frac{64}{10n+3} - \frac{4}{10n+5} - \frac{4}{10n+7} + \frac{1}{10n+9} \right).$$

Dies übertraf Colin Percival, der im August des Jahres 1998 die 1,25-billionste, wenige Monate darauf die zehnbillionste Hexadezimalstelle mit Hilfe von mehreren, über das Internet verbundenen Rechencomputern bestimmte.[121]

## 5.6 Wie wird es weitergehen?

Seit der Erkenntnis von Ferdinand Lindemann, dass $\pi$ transzendent ist, sind fast 140 Jahre vergangen und trotzdem verbringen Menschen viele Jahre ihres Lebens damit, Nachkommastellen von $\pi$ auszurechnen oder Computer zu programmieren, welche jahrelang bis zu 50 Billionen Stellen (Stand: Jänner 2020) berechnen.[122] Doch in Wirklichkeit ist diese Beschäftigung eine Sisyphusarbeit, denn es ist bewiesen, dass diese Berechnungen nie zu einem Ende kommen werden. Sie ermöglichen jedoch, schnelle Computer zu testen oder neue Methoden zur Berechnung von $\pi$ zu eröffnen und zu testen.[123]

117 vgl. Stewart, 2015, S.71f.
118 vgl. Schmidt, 2001, S.99.
119 vgl. Stewart, 2018, S.243f.
120 vgl. Stewart, 2018, S.243.
121 vgl. Lexikon der Mathematik: $\pi$, https://www.spektrum.de
122 vgl. Die Kreiszahl Pi - Faszination in Ziffern.
https://3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592.eu/wie-viele-pi-stellen-gibt-es/ (letzter Zugriff am 15.1.2021).
123 vgl. Stewart, 2015, S.54.

# 6 Vergleich der Berechnungsmethoden

## 6.1 Fehlerbestimmung unterschiedlicher Berechnungsmethoden

In diesem Kapitel werden einige der vorgestellten Berechnungsmethoden verglichen. Dazu werden der durch die jeweilige Berechnungsmethode ermittelte Wert und die uns bekannte Zahl $\pi$ anhand des Fehlers $F$, vgl. Gl. (2), verglichen. Bei Reihenentwicklungen oder Kettenbrüchen wird einmal der Fehler $F_1$ nach dem 1. Iterationsschritt und der Fehler $F_{20}$ nach dem 20. Iterationsschritt angegeben, um sichtbar zu machen, wie sich die jeweilige Reihenentwicklung an den tatsächlichen Wert annähert.

| Gl. | Formel | Wert | $F$ [%] | $F_1$ [%] | $F_{20}$ [%] |
|---|---|---|---|---|---|
| (1) | $\pi = \frac{256}{81}$ | $3,1605$ | 0,601 | - | - |
| (3) | $\pi = 12 \cdot \frac{\sin(30°)}{2}$ | 3 | 4,507 | - | - |
| (4) | $\pi = \frac{25}{8}$ | 3,125 | 0,528 | - | - |
| (5) | $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ | 3,141 851 | 0,008 22 | - | - |
| (6) | $\pi = \sqrt{10}$ | $3,162$ | 0,650 | - | - |
| (7) | $\pi = \frac{142}{45}$ | $3,1\dot{5}$ | 0,444 | - | - |
| (8) | $\pi = \frac{355}{113}$ | 3,141 593 | $8,49 \cdot 10^{-6}$ | - | - |
| (9) | $\pi = 4 \cdot \left(\frac{9\,785}{11\,136}\right)^2$ | 3,0883 | 1,706 | - | - |
| (10) | $\pi = 3 + \frac{177}{1250}$ | 3,1416 | 0,000 234 | - | - |
| (11) | $\sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{2+\sqrt{2}}$ | 3,088 326 | 1,696 | - | - |
| (12) | $\pi = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \ldots}$ | - | - | 9,968 | $3,739 \cdot 10^{-13}$ |
| (13) | $3,...535 < \pi < 3,..537$ | 3,141 593 | $3,25 \cdot 10^{-10}$ | - | - |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (14) | $\frac{\pi}{2} = 2\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\right)$ | - | - | 13,18 | 1,197 |
| (15) | $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}$ | - | - | 27,32 | -1,590 |
| (16) | $\pi + 3 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n \cdot 2^n}{\binom{2n}{n}}$ | - | - | -163,7 | -0,00592 |
| (17) | $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ | - | - | -22,03 | -1,494 |

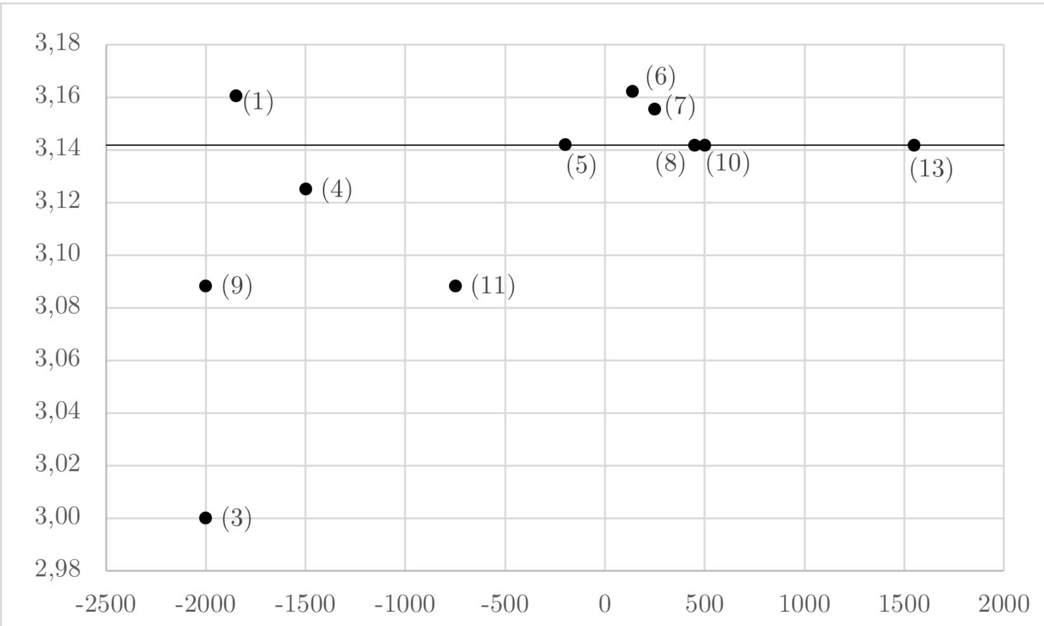


Abbildung 3: Annäherung an die Zahl $\pi$ im Laufe der Zeit.

Allgemein kann man aus Abb. 3 ablesen, dass sich die Berechnung von $\pi$ im Laufe der Zeit immer mehr verbessert hat. Einige Werte stechen jedoch besonders hervor: Gl. (1) ist bemerkenswert gut, im Gegensatz dazu sind die deutlich jüngeren Werte der Gleichungen (6) und (7) erstaunlich ungenau für die jeweilige Zeit.

## 6.2 Grafiken zu Reihenentwicklungen

Nachfolgend werden einige der in 6.1 angeführten Berechnungsmethoden grafisch miteinander verglichen. Dadurch soll einerseits sichtbar gemacht werden, wie schnell die Formel konvergiert und andererseits auf welche Art sie konvergiert. Um ein schnelleres optisches Vergleichen zu ermöglichen, ist sowohl der auf der x-Achse als auch der auf der y-Achse abgebildete Bereich immer gleich groß. Auf der ersten Achse sind die Iterationsschritte von 1 bis 100 bzw. 1 bis 20 abgebildet, auf der zweiten Achse ist ein Bereich von 0,3 bzw. – wenn erforderlich – ein vergrößerter Abschnitt dargestellt.

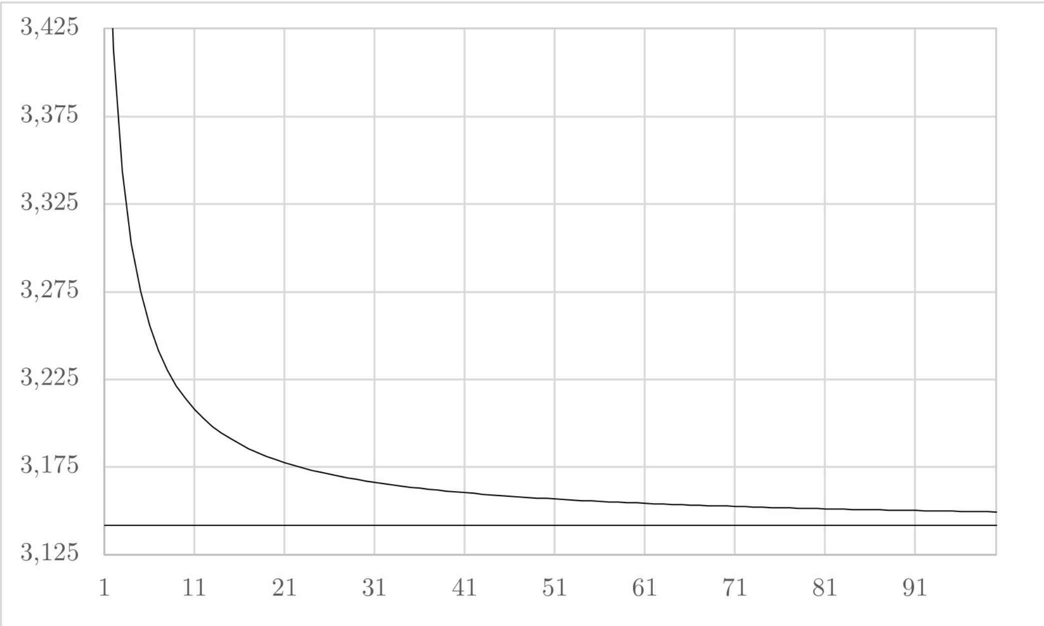


Abbildung 4: Gl. (14): $\frac{\pi}{2} = 2\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\right)$ nach Wallis.

Gl. (14) zeigt in Abb. 4 einen Verlauf, welcher sich zuerst rasch, dann asymptotisch an den gesuchten Wert annähert, diesen aber nie erreichen wird. Man erkennt, dass diese Reihe nur sehr langsam konvergiert.

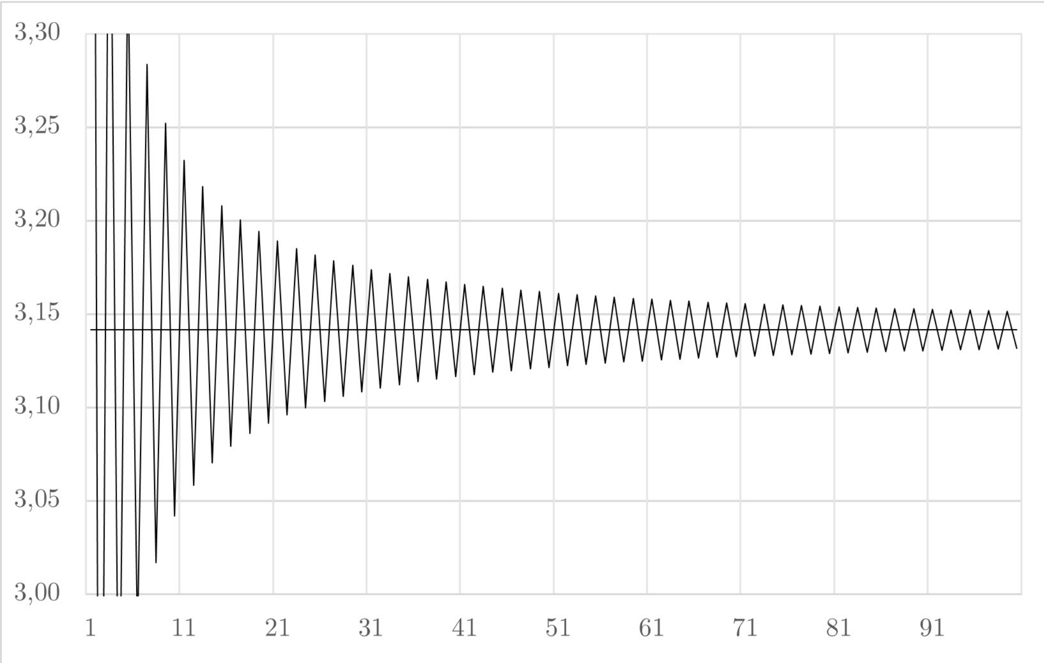


Abbildung 5: Gl. (15): $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ nach Leibniz.

Abb. 5 zeigt den Verlauf der Annäherung von Gl. (15) an $\pi$. Da im Zähler der Ausdruck $(-1)^n$ zu finden ist, erfolgt die Annäherung durch Werte, die einmal größer und einmal kleiner als $\pi$ sind. Auch diese konvergiert nur sehr langsam.

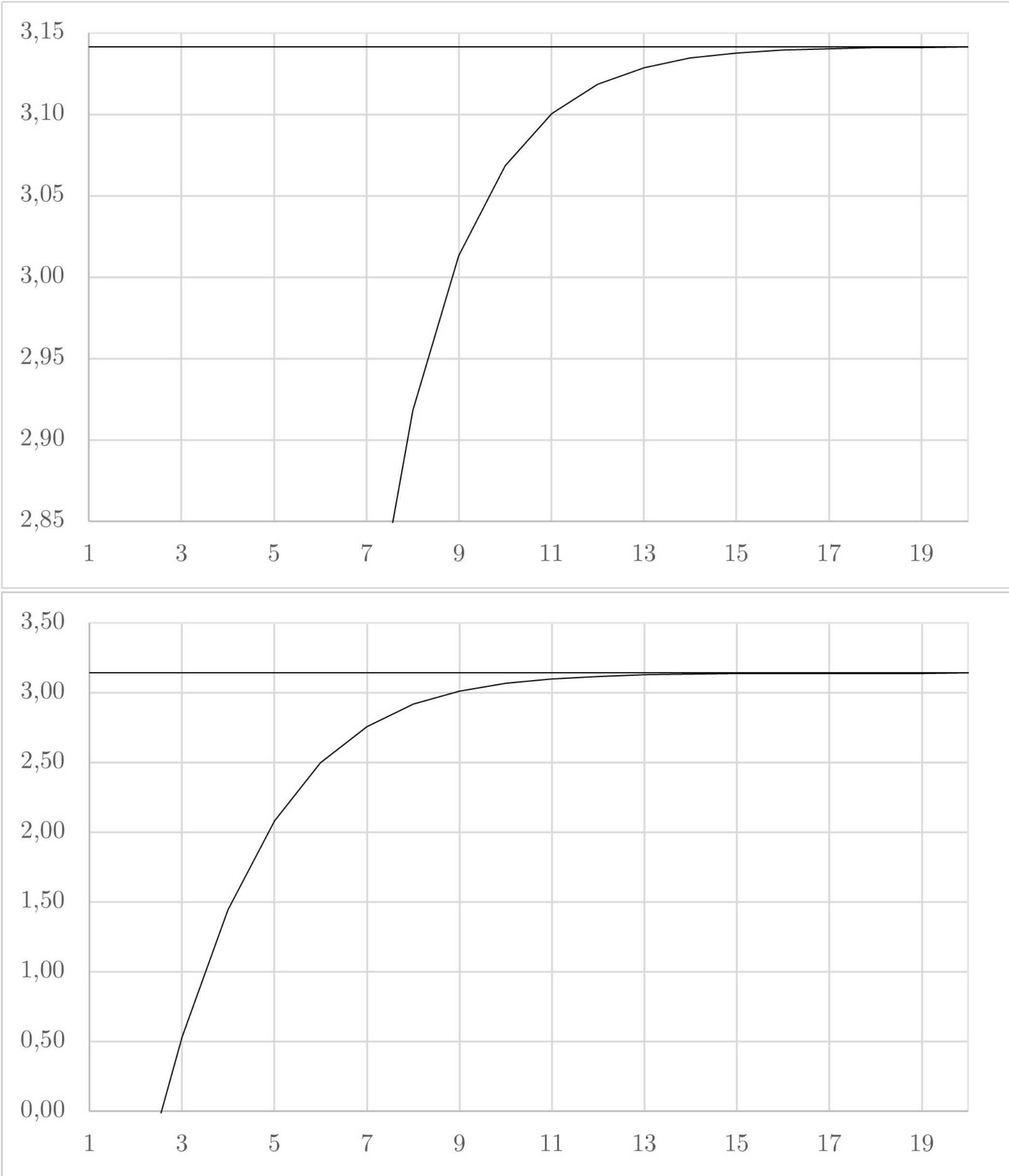


Abbildung 6: Gl. (16), $\pi + 3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 2^n}{\binom{2n}{n}}$ nach Euler.

Die Annährung erfolgt, wie man im unteren Teil von Abb. 6 erkennt, durch Werte der Gl. (16), die Anfangs sogar negativ, dann immer kleiner als $\pi$ sind. Man sieht im oberen Teil, dass diese Summenformel dann aber sehr rasch konvergiert.

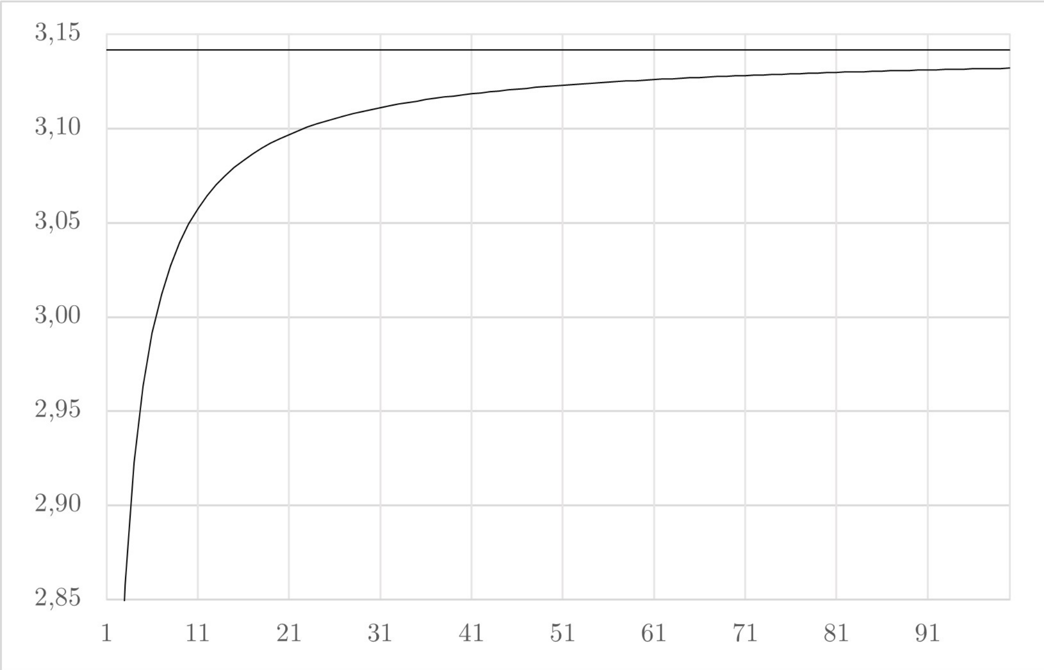


Abbildung 7: Gl. (17), $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ nach Euler.

Die in Abb. 7 gezeigte Gl. (17) nähert sich von unten zuerst erstaunlich schnell, ab etwa dem 50. Iterationsschritt jedoch nur mehr langsam an den tatsächlichen Wert von $\pi$ an.

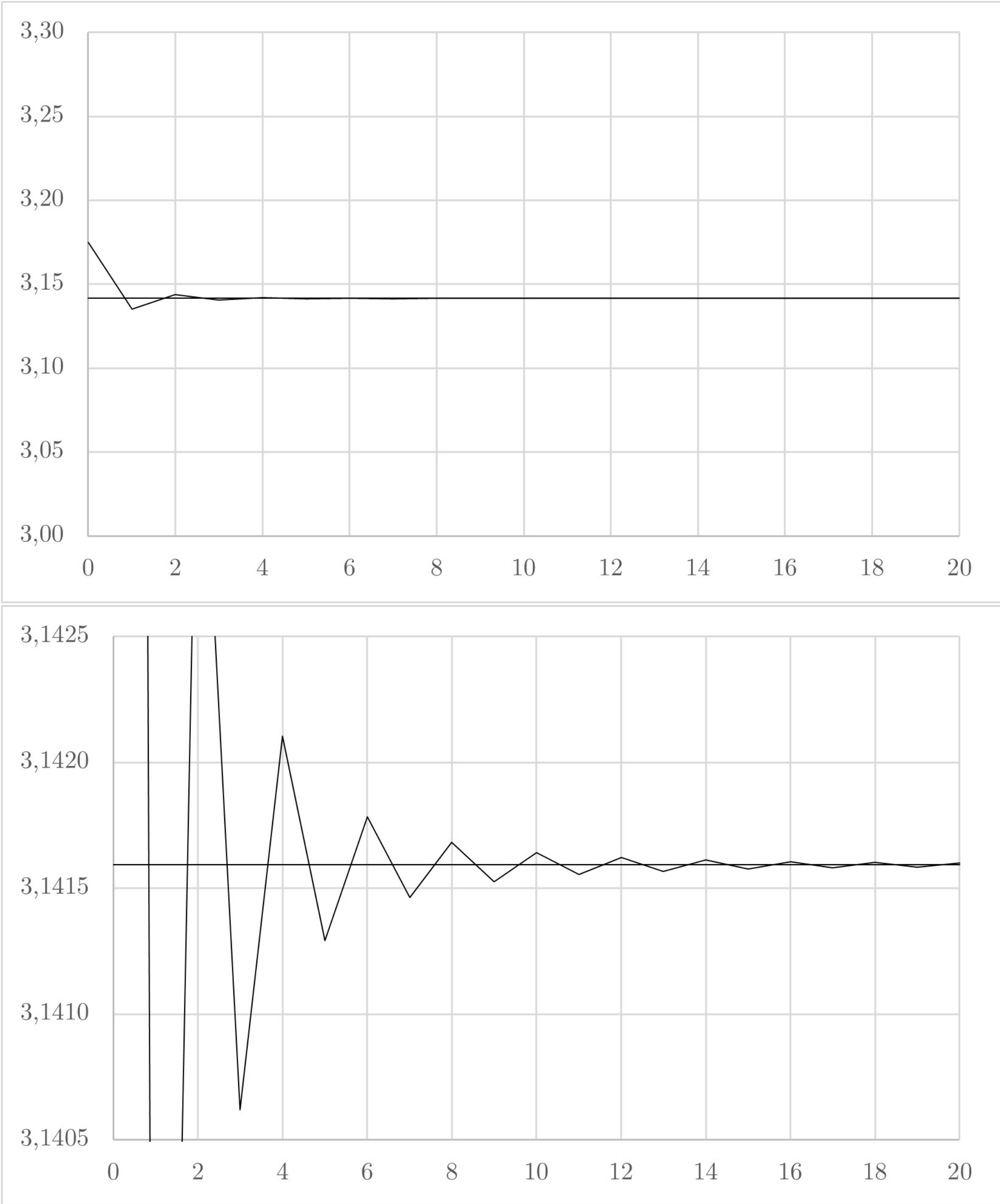


Abbildung 8: Gl. (18), $\frac{\pi^3}{32} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ nach Euler.

Da die Konvergenz der in Abb. 8 abgebildeten Gl. (18) sehr rasch erfolgt, ist im unteren Teil der Abbildung der Verlauf mit einem vergrößerten Ausschnitt der y-Achse gezeigt, was einer Vergrößerung um den Faktor 150 entspricht.

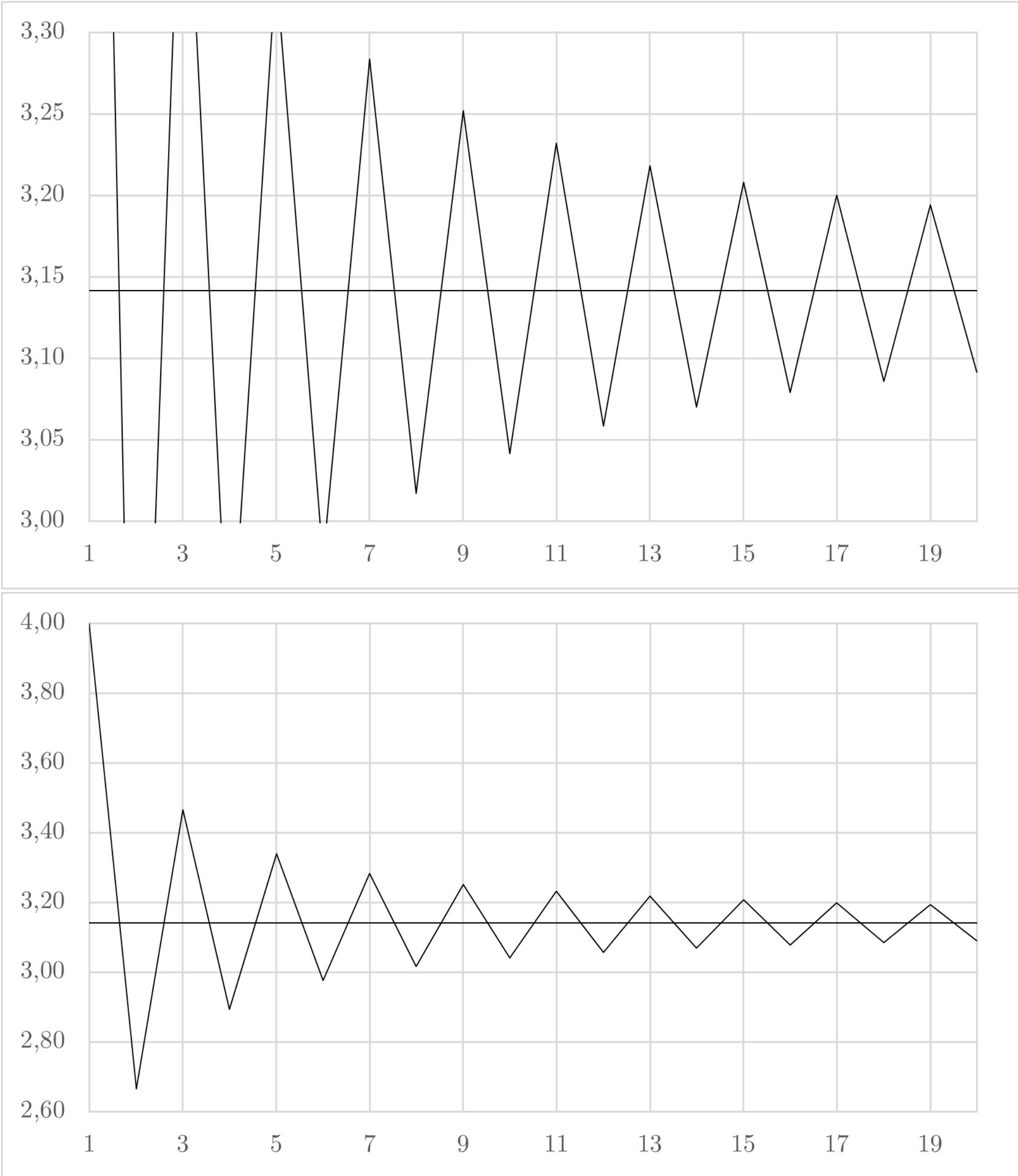


Abbildung 9: Gl. (19), $\pi = 3 + \cfrac{1^2}{6 + \cfrac{3^2}{6 + \dots}}$ nach Lambert.

Die in Abb. 9 grafisch dargestellte Gl. (19) zeigt die Annäherung durch Werte, die einmal größer und im nächsten Rechenschritt kleiner als $\pi$ sind. Auch hier erkennt man eine äußerst langsame Konvergenz.

# 7 Schlusswort

Schon seit Anbeginn der Aufzeichnungen zur Berechnung der Kreiszahl $\pi$ sind über die Jahre hinweg immer exaktere Ergebnisse überliefert und Berechnungsmethoden festgehalten worden. Diese sind mittlerweile so genau, dass die Ermittlung weiterer Billiarden oder sogar Trilliarden von Nachkommastellen für den Alltag oder für wissenschaftliche Anwengungen unnötig ist, wie folgende Beispiele zeigen:

- Die NASA verwendet für die Raumfahrt und für dazu nötige Berechnungen $\pi$ auf 15 Nachkommastellen.[124] Diese 15 Nachkommastellen reichen, um Sonden und Raketen ins All zu schicken, welche sich dort sehr lange Zeit aufhalten und extrem große Strecken zurücklegen, ihren vorgesehenen Landeplatz aber um keinen Zentimeter verfehlen werden.

- Ein, wie ich finde, noch anschaulicheres Beispiel ist jenes: Um den Umfang des ganzen Universums auf den Durchmesser eines Wasserstoffatoms genau berechnen zu können, braucht man lediglich 39 oder 40 Nachkommastellen von $\pi$.[125]

- Ähnliches gilt für die Berechnung des Erdumfangs: Verwendet man die erwähnten 15 Nachkommastellen von $\pi$, so ist die Abweichung in der Größenordnung der Abmessung eines Moleküls.[126]

Zusammenfassend kann man sagen, dass die Berechnungen, welche im Moment durchgeführt werden, eigentlich keinen technischen oder naturwissenschaftlichen praktischen Nutzen haben, da wir diese unglaublich große Zahl an Nachkommastellen in diesem Zusammenhang nie brauchen werden. Es kann jedoch sein, dass bei der Suche nach neuen, effizienteren Berechnungsmethoden ein mathematischer Zusammenhang entdeckt wird, der an einer ganz anderen Stelle genutzt werden kann.

Die wissenschaftliche Grundlagenforschung muss jedoch keinen unmittelbaren wirtschaftlichen Sinn oder Nutzen haben. Diese Art der Forschung, welche vom natürlichen Interesse und der Neugier des Menschen geprägt und getrieben ist, hat das alleinige Ziel Erkenntnis zu gewinnen. Sie kann aber immer ein neuer Impuls für mögliche praktische Anwendungen und damit ein Nutzen für die Gesellschaft sein.

124 vgl. NASA Jet Propulsion Laboratory. https://www.jpl.nasa.gov/edu/news/2016/3/16/how-many-decimals-of-pi-do-we-really-need/ (Zugriff am 23.3.2019).
125 vgl. NASA Jet Propulsion Laboratory, www.jpl.nasa.gov, 2016., Punkt 3.
126 vgl. NASA Jet Propulsion Laboratory, www.jpl.nasa.gov, 2016., Punkt 2.

# Literatur


[1] Alten, Heinz-Wilhelm/Djafari Naini, Alireza/et al.: 4000 Jahre Algebra. 2. Auflage. - Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2014.

[2] Die Bibel. - Klosterneuburg: Verlag Österreichisches Katholisches Bibelwerk, 1986.

[3] Blatner, David: $\pi$. Magie einer Zahl. - Reinbeck bei Hamburg: Rowohlt Verlag GmbH, 2000.

[4] Der Brockhaus. - Leipzig: F. A. Brockhaus GmbH, 2005.

[5] Hein, Wolfgang: Die Mathematik im Altertum. Von Algebra bis Zinseszins. - Darmstadt: WBG Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 2012.

[6] Die Kreiszahl Pi - Faszination in Ziffern. https://3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459 2.eu/wie-viele-pi-stellen-gibt-es/ (Zugriff am 24.3.2019).

[7] Lexikon der Mathematik: $\pi$. https://www.spektrum.de/lexikon/mathematik/pi/9467 (Zugriff am 04.08.2020).

[8] Methoden zur Berechnung der Kreiszahl $\pi$. https://www.tu-ilmenau.de/fileadmin/media/num/neundorf/Dokumente/Pi_und_e/Peter2.pdf (Zugriff am 29.06.2020).

[9] NASA Jet Propulsion Laboratory. https://www.jpl.nasa.gov/edu/news/2016/3/16/how-many-decimals-of-pi-do-we-really-need/ (Zugriff am 23.3.2019).

[10] Plofker, Kim: Mathematics in India. In Katz, Victor J.: The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam: A Sourcebook. - Princeton University Press, 2007.

[11] Schmidt, Karl Helmut: $\pi$. Geschichte und Algorithmen einer Zahl. - Books on Demand GmbH, 2001.

[12] Scholz, Werner: Die Geschichte der Approximationen der Zahl $\pi$. Fachbereichsarbeit am GRG XIII Wenzgasse. 3. Version, 2001.

[13] Stewart, Ian: Die letzten Rätsel der Mathematik. - Reinbeck bei Hamburg: Rowohlt e-Book Verlag, 2015.

[14] Stewart, Ian: Unglaubliche Zahlen. 2. Auflage. - Reinbeck bei Hamburg: Rowohlt Taschenbuch Verlag, 2018.

# Abbildungsverzeichnis

## Eidesstattliche Erklärung

Ich, Hannes Pantscharowitsch (Klasse: 8B), erkläre hiemit eidesstattlich, dass ich meine Vorwissenschaftliche Arbeit ohne fremde Hilfe verfasst und nur die angegebene Literatur verwendet habe.

Hannes Pantscharowitsch

Datum